ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φεβρουάριος 2017

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ:</u> Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρεις ώρες. Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα (2 μονάδες το καθένα). **Καλή Επιτυχία.**

<u>***Θέμα 1***</u> : α) Αν $x \in \mathbb{C}^n$, να αποδειχτούν οι ανισότητες

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \quad \text{και}$$

$$\|x\|_2^2 \leq \|x\|_1 \|x\|_\infty.$$

β) Να αποδείξετε ότι $\|QA\|_2 = \|A\|_2$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι ορθογώνιος πίνακας.

<u>***Θέμα 2***</u> : Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ όπου $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση και να συγκριθούν μεταξύ των οι μέθοδοι Jacobi, Gauss-Seidel, βέλτιστη SOR και η βέλτιστη μέθοδος παρεκβολής (extrapolated) της Gauss-Seidel. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις με ριζικά και κλάσματα στους υπολογισμούς.)

<u>***Θέμα 3***</u> : α) Να αποδείξετε ότι δυο διαδοχικά διανύσματα υπόλοιπο $r^{(k)}$ και $r^{(k+1)}$ της μεθόδου απότομης καθόδου, είναι ορθογώνια.

β) Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Αφού αποδειχτεί ότι ο A είναι θετικά ορισμένος, να λυθεί το σύστημα με τη μέθοδο συζυγών κλίσεων με αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = 0$.

(Να διατηρείτε κλάσματα κατά τους υπολογισμούς.)

<u>***Θέμα 4***</u> : Να λυθεί το γραμμικό πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων $\min_x \|b - Ax\|_2$, με

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

και $b = (-2 \;\; -1 \;\; 3 \;\; 1)^T$, με την QR ανάλυση χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Gram-Schmidt ορθογωνοποίησης. Στη συνέχεια, να βρεθεί η τιμή $\min_x \|b - Ax\|_2$. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις με ριζικά και κλάσματα στους υπολογισμούς.)

<u>***Θέμα 5***</u> : Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -3 \\ -6 & 8 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Να γίνουν δυο επαναλήψεις για την προσέγγιση της μικρότερης απόλυτα ιδιοτιμής και του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των αντίστροφων δυνάμεων με τον αλγόριθμο της $\|\cdot\|_\infty$ και με αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = (0\;0\;1)^T$. Η λύση των συστημάτων να γίνει με την παραγοντοποίηση Cholesky. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις με κλάσματα στους υπολογισμούς.)